



§ 4.7 函数的定义和性质

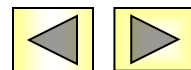
一、函数的概念

函数： 设 F 为二元关系，若对任意的 $x \in \text{dom } F$ 都存在唯一的 $y \in \text{ran } F$ ，使得 xFy 成立，则称 F 为函数，并称 y 是 F 在 x 的函数值。

若 $\langle x, y \rangle \in \text{函数 } F$ ，则记作 $F(x) = y$ 。

如： $F_1 = \{\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_1 \rangle, \langle x_3, y_2 \rangle\}$ 是函数，

但 $F_2 = \{\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_1, y_2 \rangle, \langle x_2, y_1 \rangle, \langle x_3, y_2 \rangle\}$ 不是函数





§ 4.7 函数的定义和性质

从 A 到 B 的函数:

设 A, B 是集合, 如果函数 F 满足条件:

$$(1) \operatorname{dom} F = A \quad (2) \operatorname{ran} F \subseteq B$$

则称 F 是从 A 到 B 的函数。记作 $F: A \rightarrow B$

从 A 到 B 的函数 F 与从 A 到 B 的关系 R 的区别:

$$(1) \operatorname{dom} F = A, \text{ 而 } \operatorname{dom} R \subseteq A.$$

(2) 函数 F 中, 对于一个 x 满足 $x F y$ 的 y 是唯一的,
而关系 R 中, 对于一个 x 满足 $x R y$ 的 y 可能不唯一。





§ 4.7 函数的定义和性质

设 A, B 为集合, 记 B^A 为所有从 A 到 B 的函数构成的集合。

集合 A' 在函数 F 下的象:

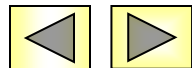
设 $F: A \rightarrow B, A' \subseteq A,$

则 $F(A') = \{ F(x) \mid x \in A' \}$ 称为 A' 在 F 下的象。

当 $A' = A$ 时, 称 $F(A') = F(A) = \text{ran } F$ 是函数的象。

如 $F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, F(x) = x^2,$ 则 $F(\{-1, 0, 1\}) = \{0, 1\}$

$F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = e^x,$ 则 $F(\{-1, 0, 1\}) = \{e^{-1}, 1, e\}$



§ 4.7 函数的定义和性质

二、函数的性质

设函数 $F : A \rightarrow B$

- 1、**满射**：若 $\text{ran } F = B$ ，则称 F 是满射的(到上的)。
- 2、**单射**：若对任意的 $x_1, x_2 \in A$ ， $x_1 \neq x_2$ ，都有 $F(x_1) \neq F(x_2)$ ，则称 F 是单射的(一一的)。
- 3、**双射**：若 F 既是满射的又是单射的，则称 F 是双射的(一一到上的)。





§ 4.7 函数的定义和性质

例16: 确定下列 F 是否为 A 到 B 的函数。若是则指出其是否为单射、满射或双射的。

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$$F = \{ \langle 1, 6 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 2, 8 \rangle \}$$

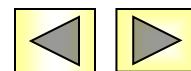
(2) A, B 同上, $F = \{ \langle 1, 6 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 2, 6 \rangle \}$

(3) A, B 同上, $F = \{ \langle 1, 6 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 1, 8 \rangle \}$

(4) A, B 为实数集, $F(x) = x^2 - x$

(5) A, B 为实数集, $F(x) = 1/x$

(6) A, B 为实数集, $F(x) = x/(x^2 + 1)$





§ 4.7 函数的定义和性质

例16: 确定下列 F 是否为 A 到 B 的函数。若是则指出其是否为单射、满射或双射的。

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$$F = \{ \langle 1, 6 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 2, 8 \rangle \}$$

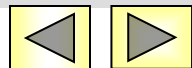
(2) A, B 同上, $F = \{ \langle 1, 6 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 2, 6 \rangle \}$

(3) A, B 同上, $F = \{ \langle 1, 6 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 1, 8 \rangle \}$

(1) F 是从 A 到 B 的函数, 是单射的, 不是满射的。

(2) F 是从 A 到 B 的函数, 不是单射的, 不是满射的。

(3) F 不是从 A 到 B 的函数。



§ 4.7 函数的定义和性质

例16: 确定下列 F 是否为 A 到 B 的函数。若是则指出其是否为单射、满射或双射的。

(4) A, B 为实数集, $F(x) = x^2 - x$

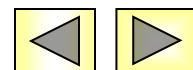
(5) A, B 同上, $F(x) = 1/x$

(6) A, B 同上, $F(x) = x/(x^2 + 1)$

(4) F 是从 A 到 B 的函数, 不是单射的, 不是满射的。

(5) F 不是从 A 到 B 的函数。

(6) F 是从 A 到 B 的函数, 不是单射的, 不是满射的。



§ 4.7 函数的定义和性质

例17: 判断下列函数的单射、满射和双射性。

(1) $F : R \times R \rightarrow R \times R$, R 为实数集,

$$F (<x, y>) = <x + y, x - y>.$$

(2) $F : N \times N \rightarrow N$, N 为自然数集,

$$F (<x, y>) = |x^2 - y^2|.$$



§ 4.7 函数的定义和性质

例17: 判断下列函数的单射、满射和双射性。

(1) $F : R \times R \rightarrow R \times R$, R 为实数集,

$$F (<x, y>) = <x + y, x - y>.$$

解: 对任意 $<x, y>, <u, v> \in R \times R$, 且 $<x, y> \neq <u, v>$,

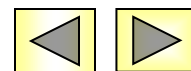
假设有 $<x + y, x - y> = <u + v, u - v>$

则有 $x + y = u + v$ 和 $x - y = u - v$

联立两式解得: $x = u$ 且 $y = v$, 它与 $<x, y> \neq <u, v>$ 矛盾,

因此一定有 $<x + y, x - y> \neq <u + v, u - v>$,

即函数具有单射性。



§ 4.7 函数的定义和性质

例17：判断下列函数的单射、满射和双射性。

(1) $F : R \times R \rightarrow R \times R$, R 为实数集,

$$F(\langle x, y \rangle) = \langle x + y, x - y \rangle.$$

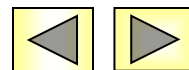
又, 对任意 $\langle u, v \rangle \in R \times R$, 假设存在 $\langle x, y \rangle \in R \times R$, 满足 $F(\langle x, y \rangle) = \langle u, v \rangle$, 则有 $\langle x + y, x - y \rangle = \langle u, v \rangle$

即
$$x + y = u \quad \text{且} \quad x - y = v$$

联立两式解出: $x = (u + v)/2$ 且 $y = (u - v)/2$,

于是, $\text{ran } F = R \times R$

即函数具有满射性。因此, 该函数具有双射性。





§ 4.7 函数的定义和性质

例17：判断下列函数的单射、满射和双射性。

(2) $F : N \times N \rightarrow N$ ， N 为自然数集，

$$F(\langle x, y \rangle) = |x^2 - y^2|。$$

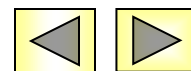
解：因为对任意 $k \in N$ ，都有 $F(\langle k, k \rangle) = 0$ ，

所以函数不具有单射性。

同时不存在 $x, y \in N$ ，满足 $|x^2 - y^2| = 2$ ，

即 $2 \notin \text{ran } F$ ，则函数也不具有满射性。

因此函数也不具有双射性。



§ 4.7 函数的定义和性质

三、几类常见函数

1、常函数：

设 $F : A \rightarrow B$ ，若 $\exists y (y \in B)$ ，使得
 $\forall x (x \in A \rightarrow F(x) = y)$ 成立，则称 F 是常函数。

2、恒等函数：

设 $F : A \rightarrow A$ ，若 $\forall x (x \in A \rightarrow F(x) = x)$ 成立，
则称 F 是恒等函数。

A 上的恒等关系 I_A 就是一个恒等函数。



§ 4.7 函数的定义和性质

3、单调函数： 设 $F : R \rightarrow R$,

(1) 若 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in R \wedge x_2 \in R \wedge x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) \leq F(x_2))$

成立，则称 F 是单调递增函数。

(2) 若 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in R \wedge x_2 \in R \wedge x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) < F(x_2))$

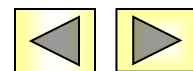
成立，则称 F 是严格单调递增函数。

(3) 若 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in R \wedge x_2 \in R \wedge x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) \geq F(x_2))$

成立，则称 F 是单调递减函数。

(4) 若 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in R \wedge x_2 \in R \wedge x_1 < x_2 \rightarrow F(x_1) > F(x_2))$

成立，则称 F 是严格单调递减函数。



§ 4.7 函数的定义和性质

4、特征函数：

设 A 为集合，对任意 $A' \subseteq A$ ，令

$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1 & \text{若 } a \in A' \\ 0 & \text{若 } a \in A - A' \end{cases}$$

则称 $\chi_{A'}: A \rightarrow \{0, 1\}$ 为 A' 的特征函数。

例如： $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $A' = \{1, 2\}$

则 $\chi_{A'}(1) = \chi_{A'}(2) = 1$, $\chi_{A'}(3) = \chi_{A'}(4) = 0$



§ 4.7 函数的定义和性质

5、自然映射：

设 R 是 A 上的等价关系，定义一个从 A 到 A/R 的函数 $g : A \rightarrow A/R$ 且 $g(a) = [a]$ ，则称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射。

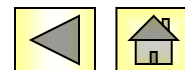
自然映射将 A 中的元素 a 映射到 a 的等价类 $[a]$ 。

例如： $A = \{ 1, 2, 3 \}$,

$$R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$$

则： $[1] = [3] = \{1, 3\}$, $[2] = \{2\}$

$$g(1) = g(3) = \{1, 3\}, \quad g(2) = \{2\}$$





§ 4.8 函数的复合和反函数

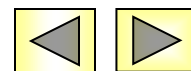
一、函数的复合运算

函数的复合:

设 F, G 为函数, 则 $F \circ G$ 也是函数, 且满足条件:

- (1) $\text{dom} (F \circ G) = \{ x \mid x \in \text{dom} G \wedge G(x) \in \text{dom} F \};$
- (2) 对任意的 $x \in \text{dom} (F \circ G)$, 有 $F \circ G(x) = F(G(x))$ 。

设 $F: B \rightarrow C$, $G: A \rightarrow B$, 则 $F \circ G: A \rightarrow C$,
且对任意的 $x \in A$, 有 $F \circ G(x) = F(G(x))$ 。



§ 4.8 函数的复合和反函数

函数的复合运算的性质：

设 $F : B \rightarrow C$, $G : A \rightarrow B$,

- (1) 若 F, G 是满射的, 则 $F \circ G : A \rightarrow C$ 也是满射的。
- (2) 若 F, G 是单射的, 则 $F \circ G : A \rightarrow C$ 也是单射的。
- (3) 若 F, G 是双射的, 则 $F \circ G : A \rightarrow C$ 也是双射的。





§ 4.8 函数的复合和反函数

二、函数的逆运算

函数的逆：

设函数 $F : A \rightarrow B$ 是双射函数，则 F^{-1} 是函数，并且是从 B 到 A 的双射函数。称 F^{-1} 是 F 的反函数。

函数的逆运算的性质：

$$F^{-1} \circ F = I_A, \quad F \circ F^{-1} = I_B$$



§ 4.8 函数的复合和反函数

例18: 设 $F, G, H \in R^R$, 且 $F(x) = 2x + 5$, $G(x) = x - 7$, $H(x) = x/3$, 求 $F \circ G, G \circ F, G \circ G, G \circ H, F^{-1}, G^{-1}, H^{-1}$

$$\text{解: } F \circ G(x) = F(G(x)) = F(x-7) = 2(x-7)+5 = 2x-9$$

$$G \circ F(x) = G(F(x)) = G(2x+5) = (2x+5) - 7 = 2x-2$$

$$G \circ G(x) = G(G(x)) = G(x-7) = (x-7) - 7 = x-14$$

$$G \circ H(x) = G(H(x)) = G(x/3) = x/3 - 7$$

$$F^{-1}(x) = (x - 5)/2$$

$$G^{-1}(x) = x + 7$$

$$H^{-1}(x) = 3x$$

